Análisis 1 - Alimentos - 1° cuatrimestre 2020 (virtual)

Práctica 5

Polinomio de Taylor, integración y modelos de ecuaciones diferenciales

1. Calcular el poliomio de Taylor de orden 2 y el resto correspondiente en $x_0 = 0$ para cada una de las siguientes funciones

   a) $f(x) = e^x$ *b*) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *c*) $f(x) = \cos(x)$

   e) $f(x) = \ln(1-x)$ *e*) $f(x) = \ln(1+x^2)$ *f*) $f(x) = \sqrt{1-x}$

   g) $f(x) = \arctan(x)$ *h*) $f(x) = (1+x)^x$ *i*) $f(x) = x\ln(1+x)$

2. Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2, se define su Laplaciano $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$
   Decimos que f satisface la ecuación de Laplace (o que f es una *función armónica*) en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si $\Delta f \equiv 0$ en U. Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determinar U en cada caso:

   a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

   b) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

   c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

   d) $f(x,y,z) = e^{3x+4}\cos(3z) + 4y$

3. Dado un campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1, si $F = (f_1, f_2, f_3)$ se define la *divergencia* de F como la función escalar $div(F) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$div(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$
   También se usa la notación $\nabla \cdot F = div(F)$ para la divergencia ¿por qué?

   Probar que para toda $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2,

   a) la divergencia de su campo gradiente es igual a su Laplaciano, es decir
$$\nabla \cdot \nabla f = \Delta f,$$
   y por eso se usa la notación $\Delta = \nabla^2$ para el Laplaciano.

   b) la diferencial del su campo gradiente es igual a su matriz Hessiana, es decir
$$D(\nabla f) = Hf.$$

4. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de las funciones dadas en el punto indicado, y escribir la fórmula del resto.

a)	$f(x,y) = (x+y)^2$	en $(0,0)$
b)	$f(x,y) = e^{x+y}$	en $(0,0)$
c)	$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$	en $(0,0)$
d)	$f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$	en $(1,0)$
e)	$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$	en $(1,\pi)$
f)	$f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$	en $(2,\frac{\pi}{4})$
g)	$f(x,y) = \ln(1+xy)$	en $(2,3)$
h)	$f(x,y) = x + xy + 2y$	en $(1,1)$
i)	$f(x,y) = x^y$	en $(1,2)$

5. Sea $f(x,y) = xe^y$.

   a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1,0)$.

   b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98;0,02)$. Estimar el error cometido.

6. Sea $f(x,y) = (x+1, 2y - e^x)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1, tal que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

   Calcular $\nabla g(1,-1)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(1,1) = 0, \quad \nabla f(1,1) = (0,2) \ \text{ y } \ Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = \operatorname{sen}(f(x,y)) - 2xy + x^2$, calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $P = (1,1)$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f(2,1) = 1$ y

$$xyf(x,y)^3 + y^2 e^{x-2f(x,y)} = 3$$

   para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (2,1)$.

Integrales y área

9. En cada caso, calcule el área de la región encerrada por las curvas (sugerencia: haga los gráficos).

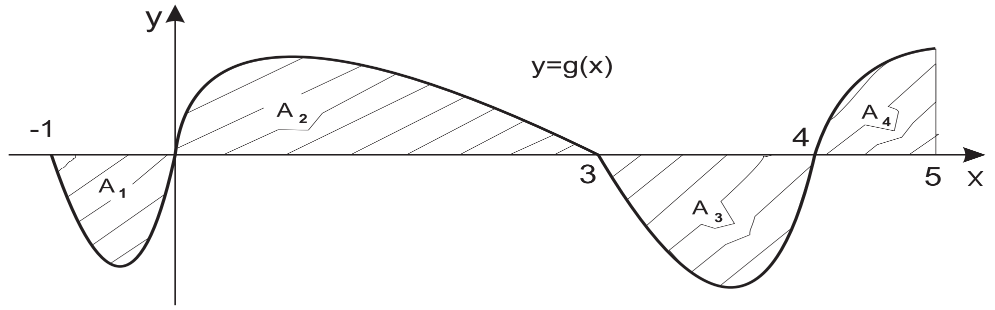
a) $y = x;\ y = x^2 - 1$	b) $y = x^3;\ y = x$
c) $y = x^{1/3};\ x = 0;\ y = 1$	d) $y = x^3 - 12x;\ y = x^2$
e) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ x = 0$	f) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ y = 0.$

10. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x) + |\operatorname{sen}(x)|$

   a) Halle la expresión explícita de $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$

   b) ¿Es cierto que $F : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es una función creciente?

11. De acuerdo al siguiente gráfico de $y = g(x)$,

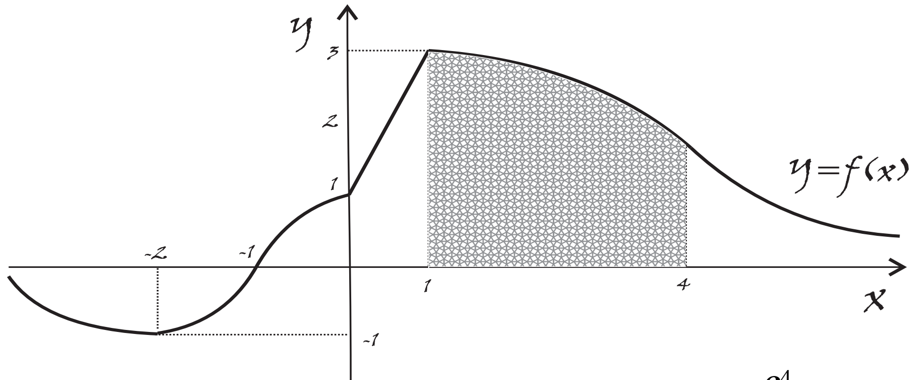


   Se conocen las áreas sombreadas: $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 2$, $A_4 = 1$. Usando solo estos datos, calcular

   a) $\displaystyle\int_0^5 g(x)dx.$ b) $\displaystyle\int_{-1}^5 g(x)dx.$

   c) $\displaystyle\int_3^4 g'(x)dx.$ d) $\displaystyle\int_0^3 x\,g'(x)dx.$

12. Considere el gráfico siguiente: (el tramo de f entre $x = 0$ y $x = 1$ es rectilíneo, y el gráfico entre x=-2 y x=0 es simétrico)



   a) Sabiendo que el área de la región sombreada vale 7, calcule $\displaystyle\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

   b) Se sabe que $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{3}{4}$. Halle el área encerrada por el eje x y el gráfico de f entre $x = -2$ y $x = 4$

   c) Si los dos cálculos anteriores le dieron el mismo resultado, está pensando mal el problema ¿por qué?

13. Halle el área de la región comprendida entre la curva $y = x\sqrt{2x+3}$ y el semieje negativo de las x.

14. Calcule el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2\,e^{3x+1}$ y $g(x) = 4\,e^{3x+1}$.

15. Calcule el área encerrada por los gráficos de $f(x) = x\ \ln(x) + x^2 \operatorname{sen}^2(x)$ y $g(x) = x + x^2 - x^2\cos^2(x)$ en el intervalo $[1, e^2]$ (se sugiere calcular $f-g$ y $g-f$ **antes** de integrar)

Ecuaciones diferenciales y modelos

16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales dadas:

a)	$y' = ky$,	$y(0) = 1$	con $k \in \mathbb{R}$ fijo
b)	$y' = {}^1\!/_y$,	$y(0) = 1$	¿Qué dominio tiene $y(x)$?
c)	$y' = {}^1\!/_y$,	$y(0) = -1$	¿Qué dominio tiene $y(x)$?
d)	$y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$,	$y(1) = 3$	
e)	$y' = 3x^2e^{-y}$,	$y(0) = 1$	
f)	$y' = y/x$,	$y(1) = 1$	¿Qué dominio tiene $y(x)$?
g)	$y' = e^{2x+y}$,	$y(0) = 0$	
h)	$xy' = y^2 + 1$,	$y(1) = 1$	
i)	$xy' = y^2 - 1$,	$y(1) = 2$	
j)	$y'' = -y$,	$y(0) = 0, y'(0) = 1$	
k)	$y'' = -y$,	$y(0) = 1, y'(0) = 0$	
l)	$xy^2y' = (x+1)^2$,	$y(1) = 0.$	¿Qué dominio tiene $y(x)$?
m)	$x\,\mathrm{sen}^2(y)y' = (x+1)^2$,	$y(1) = 0.$	

17. La segunda ley de Newton postula que un objeto que se mueve bajo la acción de una fuerza F obedece la ecuación

$$mV'(t) = F(V(t))$$

donde m es la masa del objeto y v su velocidad instantánea. Si la fuerza F es constante y no nula, y $P(t)$ denota la posición del objeto (con $P' = V$), probar que P varía cuadráticamente con el tiempo. ¿Qué pasa si la fuerza es F es nula?

18. Un objeto cambia su temperatura de acuerdo a la siguiente ley

$$y'(t) = -\lambda(y(t) - K)$$

donde K es la temperatura del ambiente y λ es una constante de proporcionalidad que depende del ambiente. Calcular la solución de la ecuación y ver que la temperatura del objeto tiende a la temperatura ambiente. ¿Qué diferencia hay si λ es positivo o negativo?

19. Un tanque mezclador tiene 50 litros de una solución compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Se le comienza a aqregar agua a una velocidad de 4 litros por minuto. Mientras se mezcla dentro del tanque, este deja salir por debajo líquido a una velocidad de 5 litros por minuto, para usar la mezcla en otro proceso. Después de 10 minutos ¿cuánto alcohol habrá en el tanque?

*Ayuda: si $y(t)$ es la cantidad de litros de alcohol en el tanque en el instante t, sabemos que $y_0 = 5$, y que $y' = -$*LO QUE SALE DE ALCOHOL. *El tanque pierde 1 litro de mezcla por minuto, la cantidad de líquido total luego de tiempo t es $50 - t$. Entonces lo que pierde de alcohol por minuto es la proporción $5/(50 - t)$ de lo que hay.*

20. La población de conejos crece proporcionalmente a la cantidad de conejos que hay. Si la constante de proporción es k y el nÃºmero de conejos en tiempo t es $N(t)$, la ecuación que gobierna este crecimiento es

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

Resolver la ecuación para una población inicial de conejos $N(0) = 2$. ¿Cuántos conejos habrá luego de 10 unidades de tiempo, si $k = 1$?

21. El matemático Pierre Verhulst consideró que una población concreta no puede crecer indefinidamente de forma exponencial, por la escasez de recursos. Propuso entonces una evolución de la población gobernada por

$$\frac{dN}{dt} = kN\left(1 - \frac{N}{M}\right).$$

donde M es el máximo de población posible, por la limitación mencionada.

a) Resolver la ecuación para $N(0) = 2$ (expresarla en términos de k, M).

b) Probar que si $k > 0$, entonces $\lim_{t\to\infty} N(t) = M$.

c) Graficar la solución para $k = 2, M = 50$.

La solución de esta ecuación diferencial se conoce como *ecuación logística*.